Всероссийская олимпиада школьников по математике

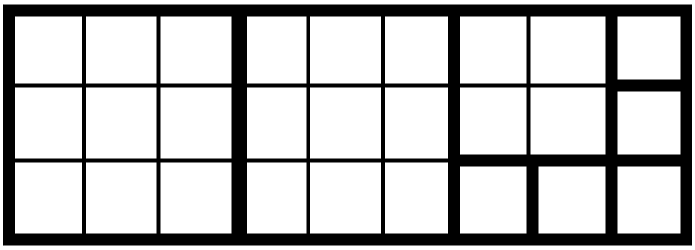
Муниципальный этап

7 класс

2025–2026 учебный год

7.1. Разрезать прямоугольник 3×9 на 8 квадратов.

Решение: Сначала разрежем прямоугольник на три квадрата размером 3×3. Два из них оставим, а от третьего отрежем квадрат 2×2. Оставшуюся часть разрежем на пять квадратов размером 1×1. Всего получится 8 квадратов.



7.2. Три друга — Пётр, Роман и Сергей — занимаются плаванием, футболом и хоккеем. Если Пётр пловец, то Сергей не футболист. Если Роман не футболист, то Пётр пловец. Если Сергей не пловец, то Роман — хоккеист. Сможете ли вы определить вид спорта каждого?

Ответ: Пётр — хоккеист, Роман — футболист, Сергей — пловец.

Решение: Предположим, что Роман не футболист, тогда (по условию 2) Пётр пловец, но если Пётр пловец, то Сергей (по условию 1) не футболист — получилось явное противоречие. Значит, Роман — футболист. Тогда Сергей пловец — иначе (по условию 3) Роман был бы хоккеистом. Значит, Пётр — хоккеист. Итак: Пётр — хоккеист, Роман — футболист, Сергей — пловец.

Если дан только ответ, то выставляется 2 балла. 7 баллов – при решении задачи с помощью таблиц или рассуждениями.

7.3. В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Решение: При первом взвешивании на одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: $12 = 6 + 6$. Получили искомое количество гвоздей: $19 = 13 + 6$.

7.4. Семь гномов собирают гирлянду для ёлки. Начинает первый гномик, он закручивает одну красную лампочку, затем второй закручивает две оранжевые, третий – три жёлтые, четвёртый – четыре зелёные, пятый – пять голубых, шестой – шесть синих, седьмой – семь фиолетовых, потом первый – одну красную и так далее. Какого цвета будет 2025 лампочка?

Ответ: Зелёная.

Решение: $2025 : (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 72$ (ост. 9). Таким образом, 2025 лампочек разбиваем на группы по 28 лампочек в каждой. Получается 72 полных групп и одна неполная, состоящая из девяти лампочек. Девятая лампочка будет зелёная.

7.5. Существует ли такое натуральное число n, что $n + n^2 + n^3 + \cdots + n^{2025} = (n + 1)^{2026}$?

Ответ: не существует.

Решение: Пусть n – четное, тогда левая часть равенства является числом четным, а правая – нечетным. Если же n – число нечетное, то левая часть является числом нечетным, а правая – четным. Значит, такого числа не существует.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.
8 класс.
Муниципальный этап. 2025 – 2026г.

1. Найдите какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа, меньших 100, произведение которых делится на 999.

2. Во всероссийской олимпиаде школьников по математике на муниципальном этапе приняли участие 211 школьников 8 и 9 классов. Для решения задач им было выдано 1084 листа бумаги, причем каждый девятиклассник получил на 2 листа больше, чем каждый восьмиклассник. Если бы восьмиклассников было на одного меньше, то все восьмиклассники вместе получили бы ровно вдвое меньше бумаги, чем все девятиклассники. Сколько восьмиклассников приняло участие в олимпиаде?

3. Учитель математики, проверив контрольные работы у трех друзей: Алексея, Бориса и Василия, сказал им: «Вы все написали работу, причем получили разные отметки («3», «4» и «5»). У Василия не «5», у Бориса – не «4», а у Алексея, по – моему, «4». В последствии оказалось, что учитель ошибся: одному ученику сказал отметку верно, а другим двум неверно. Какие отметки получил каждый из учеников?

4. Группа школьников 8-9 классов из различных районов нашей республики отправилась на экскурсию на автобусе в рамках уникального проекта «Уроки с путешествием». Это был увлекательный тур из пункта «A» в пункт «C». В пути они должны были сделать лишь одну остановку в пункте «B». Автобусная остановка «B» расположена на прямолинейном шоссе между остановками «A» и «C». Через некоторое время после выезда автобуса из «A», автобус оказался в такой точке шоссе, что расстояние от нее до одной из трёх остановок равно сумме расстояний до двух других. Ещё через такое же время автобус снова оказался в точке с таким же свойством, а ещё через 25 минут доехал до «B». Сколько времени требуется автобусу на весь путь от «A» до «C», если его скорость постоянна, а на остановке «B» он стоит 5 минут.

5. В треугольнике ABC провели биссектрису BD, а в треугольниках ABD и CBD – биссектрисы DE и DF соответственно. Оказалось, что $EF \parallel AC$. Найдите угол DEF.

Решение олимпиадных задач и критерии оценивания

1. **Ответ: Например, 36, 37, 38, 39 (или 72, 73, 74, 75)**
   Решение: Ответ можно получить, заметив, что 999 = 9*3*37

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Дан верный ответ с обоснованием (есть способ рассуждений).
5	Дан верный ответ без обоснования.
0	Нет решения.

2. **Ответ: 91 человек.**
   Пусть x листов получит каждый восьмиклассник, а x + 2 листов получит каждый девятиклассник. Так как всего листов было 1084, а количество школьников 211, то если каждый школьник получит по x листов, то это будет меньше, чем 1084, а если каждый получит по x + 2 листа, то это будет больше, чем 1084. Значит, $211x < 1084 < 211(x + 2)$. Отсюда следует, что $4 \leq x \leq 5$ (1084:211≈

Баллы	*Критерии оценивания решения*

$5{,}1 \ldots,$ x целое число). Рассмотрим варианты: если x = 5, то если восьмиклассников было y человек, то девятиклассников было (211-y) человек. Тогда из условия следует 5*(y-1)*2 = (5+2)*(211 – y); 10y – 10 = 1477 – 7y; 17y = 1487; y не целое.
Если x = 4, то 4* (y-1)*2 = (4 + 2)(211 – y); 8y – 8 = 1266 – 6y; 14y = 1274; y = 91.
(вместо рассмотрения двух вариантов может быть использована идея четности – нечетности. Так как количество листов у 8 классника равно 5 - нечетное, то у 9 классника – тоже нечетное. Значит всего количество листов должно быть нечетным, а их 1084. Получили противоречие, значит, x = 4.) Ответ восьмиклассников было 91 человек.

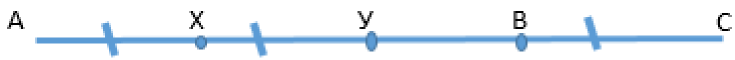
7 - 6	Верный ответ с полным подробным решением.
5 - 4	Дан верный ответ, но решение содержит неточности, или недостаточно обосновано, но при этом идея решения понятна и верна. Ответ не получен. Решение обосновано и сводится к решению квадратного уравнения, но не доведено до конца
3 - 2	Дан верный ответ, сделаны попытки кратко обосновать свой ответ, или ответ неверный, но при этом описана идея решения и она верна.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан неверный ответ без обоснования или решение и ответ отсутствуют.

3. **Ответ: Алексей – «5», Борис – «4», Василий – «3»**
   Первый случай. Пусть учитель сказал верно Алексею. Значит, у Алексея – «4». Так как Борису и Василию учитель назвал неверные отметки, то у Бориса «4», а у Василия «5». Тогда у двух учеников одинаковые отметки. Получили противоречие.
   Второй случай. Пусть учитель сказал верно Василию, то у Василия – не «5» (то есть «4» или «3»). Тогда Алексею и Борису назвали отметки неверно. Значит у Бориса – «4», а у Алексея – не «4» (то есть «5» или «3»). Значит У Василия – «3», а у Алексея «5».
   Третий случай. Учитель сказал верно Борису. То есть у Бориса – не «4» (или «3» или «5»). Так как у Алексея и Василия – неверные отметки, то у Алексея – не «4» (или «3» или «5»), а у Василия «5». Получается, что «4» никто не получил. Противоречие с условием.

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7 -6	Дан верный ответ с обоснованием (есть способ рассуждений).
5 – 4 -3	Дан верный ответ не до обоснованный.
2 - 1	Дан верный ответ. Нет обоснования

4. **Ответ. 3 часа.**
   В оба момента времени, о которых идёт речь в задаче, суммой будет, очевидно, расстояние от автобуса до самой дальней от него остановки. Это не может быть B, так как она ближе, чем C. Значит, это были C (до того момента, как автобус проехал полпути от A до C) и A (после этого момента).

   В первом случае автобус находился в точке X и расстояние от него до C равнялось сумме расстояния до A и до B. Но оно же равно сумме расстояния до B и расстояния BC. Значит, автобус проехал в точности расстояние BC. На рисунке показаны равные расстояния.
   Ко второму моменту автобус проехал ещё одно расстояние BC и оказался в точке У. Сумма расстояний от него до B и до C равна BC и ещё УB, посчитанному дважды. По условию это и есть расстояние до A, то есть УB вдвое короче BC.



А раз УВ автобус проехал за 25 минут, то ВС он проедет за 50 минут, а весь путь за 3*50 + 25 + 5 = 180 минут, то есть за три часа

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7 -6	Дан верный ответ с обоснованием
5 – 4 -3	Дан верный ответ не до обоснованный.
2 - 1	Дан верный ответ. Нет обоснования
0	Нет решения.

5. Ответ: 45 градусов.

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7 -6	Дан верный ответ с полным обоснованием
5 – 4 -3	Дан верный ответ. не до обоснованный. Не доказано, что $\angle EDF = 90^0$. Не доказано, DB – биссектриса $\angle EDF$
2 - 1	Дан верный ответ. Нет обоснования

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Необходимо учитывать следующее:

1) По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;
2) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;
3) Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;
4) Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;
5) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
6) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

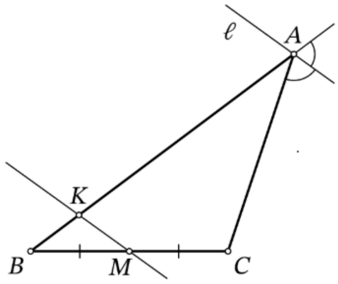
9.1. Все трехзначные числа записаны в ряд: 100 101 102 … 998 999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?

Ответ: 19.

Решение: Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа, т.е. это число оканчивается на 20 Таких чисел 9: 120, 220, …, 920 Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен, то соответствующее трехзначное число начинается на 20 Таких чисел 10: 200, 201, …, 209 Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.

Комментарий. Не доказано, что двойка не может стоять в разряде единиц – не более 5 баллов. Дан только ответ – 1 балл.

9.2. Дан треугольник *ABC*, точка *M* — середина стороны *BC*. Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла *A* треугольника *ABC*. Прямая, проходящая через *M* и параллельная ℓ, пересекает сторону *AB* в точке *K*.
Найдите длину отрезка *AK*, если *AB* = 23 и *AC* = 8.



Ответ: 15,5.

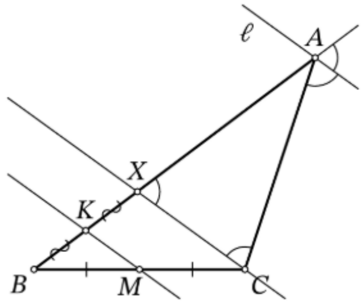
Решение:

Проведём через точку C прямую ℓ_1 параллельно прямой ℓ. Пусть X — точка пересечения прямой ℓ_1 и AB.

Заметим, что $\angle AXC = \angle ACX$, так как оба этих угла равны половине внешнего угла A, поэтому $AX = AC = 8$

В треугольнике BCX отрезок MK является средней линией, поэтому

$AK = AX + XK = 8 + BX / 2 = 8 + (AB – AX) / 2 =$
$= 8 + (23 – 8) / 2 = 15{,}5.$



9.3. Квадратный трёхчлен $x^2 – px + q$, где p и q – натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Ответ: Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9x + 20$

Решение:

По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$. Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4 \cdot \frac{7}{10} q}$. Следовательно, при условии,

что $p^2 - 4q \geqslant 0$, получаем $5\sqrt{p^2 - 4q} = \sqrt{p^2 - \frac{14}{5} q}$.

$$p^2 = \frac{81}{20} q > 4q.$$
$$4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - px + q$ равна p. Наименьшее натуральное p, удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делится на 3^4.Тогда $q = 20$.

9.4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна). Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2025?

Ответ: не может.

Решение

Воспользуемся известным вспомогательным утверждением (эквивалентным лемме о рукопожатиях): в любой компании количество людей, которые дружат с нечётным числом остальных, чётно.

Из утренних заявлений следует, что каждый рыцарь дружит с нечётным числом рыцарей, а каждый лжец, в свою очередь, дружит с чётным числом рыцарей. Из вечерних заявлений следует, что каждый лжец дружит с нечётным числом лжецов, а каждый рыцарь дружит с чётным числом лжецов. Отсюда следует, что и рыцари, и лжецы дружат с нечётным количеством жителей острова, и, согласно лемме о рукопожатиях, количество рыцарей и количество лжецов чётно. Но тогда общее количество жителей острова чётно и не может равняться 2025.

Комментарий. Следующие критерии суммируются:

1) проведён полный анализ честности количества друзей у каждого рыцаря — 2 балла;

2) проведён полный анализ честности количества друзей у каждого лжеца — 2 балла;

3) применена лемма о рукопожатиях или аналогичное утверждение — 2 балла.

9.5. Вася вырезал из картона треугольник и занумеровал его вершины цифрами 1, 2 и 3. Оказалось, что, если Васин треугольник повернуть по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, 15 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Если повернуть по часовой стрелке Васин треугольник вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, 6 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, *t* раз, то треугольник вернется в исходное положение. Какое минимальное *t* мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы при каком-то картонном треугольнике?

Ответ: 5.

Решение. Пусть угол при первой вершине равен α градусов, при второй β градусов, а при третьей γ градусов. При поворотах вокруг вершин Васин треугольник, прежде чем вернуться в стартовое положение, мог сделать несколько полных оборотов.

Пусть при вращении вокруг вершины под номером 1 он сделал k полных оборотов, при вращении вокруг вершины под номером 2 – m полных оборотов, вокруг вершины под номером 3 – n полных оборотов. Тогда из условия задачи следует, что $15\alpha = 360k$, $6\beta = 360m$ и $t\gamma = 360n$. Из первых двух уравнений находим, что $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$, значит $\alpha \geq 24$, $\beta \geq 60$. Заметим, что $t \geq 4$, так как иначе $\gamma > 120$, что в сумме с β больше 180.

$t \neq 4$, поскольку иначе $\gamma = 90$, значит $\alpha + \beta = 90$, чего быть не могло в силу $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$.

$t = 5$ подходит: возьмем треугольник с углами $\alpha = 48$, $\beta = 60$, $\gamma = 72$

Комментарий. По следующим трем позициям критерии суммируются:

- Доказано, что $t \geq 4$ — 3 балла.
- Доказано, что $t \neq 4$ — 2 балла.
- Приведен пример для $t = 5$ — 2 балла.

Если наименьшее значение не найдено, но приведен пример треугольника с таким свойством — 1 балл.

Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2025-2026 учебном году

10 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Фокусник расставил в клетках квадрата 7x7 числа от 1 до 49 в произвольном порядке. Затем он записал на доске суммы чисел во всех строках, во всех столбцах и на двух больших диагоналях. После этого он увеличил все числа, написанные на доске, на единицу. Наконец, все числа, написанные на доске, фокусник перемножил. Может ли в результате получиться число, состоящее из одних двоек?

Решение. Нет, число, состоящее из одних двоек, получиться не может. Докажем это. Сумма всех чисел от 1 до 49 равна (49*50)/2 = 1225, то есть нечетна. Следовательно, хотя бы в одной строке и хотя бы в одном столбце сумма чисел будет нечетна. (Если сумма чисел во всех строках четна, то тогда, очевидно, будет четной и общая сумма всех чисел в квадрате, что неверно.)

После увеличения на единицу нечетные числа становятся четными. Вывод: полученное в результате у фокусника число делится на 4. Осталось заметить, что число, состоящее из одних двоек, заканчивается на 22, а значит, согласно признаку делимости на 4, на 4 не делится. Утверждение доказано.
Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Всегда ли треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC?

Ответ. Всегда.

Решение. Отрезок AB виден из точек A_1 и B_1 под прямым углом. Поэтому точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB. Пусть $\angle ACB < 90°$. Тогда

$$\angle B = 180° - \angle AB_1A_1 = \angle CB_1A_1.$$

Аналогично с углом $\angle A$. Следовательно, треугольники ABC и A_1B_1C подобны по двум углам.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов. Сформулирована идея о двух вершинах и двух основаниях высот, лежащих на одной окружности – 2 балла.

3. У всех членов кружка филателистов вначале было одинаковое количество марок. В некоторый момент один из членов кружка часть своих марок раздал другим филателистам, причем всем дал одинаковое количество марок. Затем такую же операцию произвел еще один филателист и т. д. Может ли быть такое, что после нескольких таких операций у некоторых трех членов кружка будет 77, 88 и 111 марок?

Решение. Пусть n – количество филателистов. Пусть у трех филателистов сейчас имеется x, y и z марок и пусть первый филателист раздает остальным членам кружка по t марок. Тогда в результате количество марок станет равно:

у первого филателиста $x = x - (n - 1)t$;

у второго филателиста $y = y + t$;

у третьего филателиста $z = z + t$.

Мы видим, что разность количества марок у второго и третьего филателистов не изменилась:

$$y' - z' = (y + t) - (z + t) = y - z,$$

а разность количества марок у первого и второго филателистов изменилась на величину, кратную n:

$$x' - y' = (x - (n - 1)t) - (y + t) = (x - y) - nt.$$

По условию задачи вначале все филателисты имели одинаковое количество марок, то есть в начальный момент все попарные разности количеств марок были равны нулю – а значит, были кратны n. Из сказанного выше следует, что эти разности всегда будут оставаться кратными n. Если предположить, что в некоторый момент времени некоторые три филателиста будут иметь 77, 88 и 111 марок, то тогда разности $88 - 77 = 11$ и $111 - 88 = 23$ должны делиться на n. Однако числа 11 и 23 не имеют общего делителя $n \geq 3$ (по условию задачи число филателистов не менее трех).

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов. Сформулирована идея об инвариантности попарных разностей – 2 балла.

4. Графики функций $f(x)=x^2+ax+b$ и $g(x)=-x^2+cx+d$ не имеют общих точек. Докажите, что на плоскости можно провести прямую, относительно которой они лежат по разные стороны.

Решение. Рассмотрим функцию

$$h(x)=(f(x)+g(x))/2 = x(a+c)/2+(b+d)/2.$$

Графиком $h(x)$ является прямая. Докажем, что эта прямая искомая. Заметим, что при любом x_0 расстояния от соответствующей точки прямой до графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ по оси ординат равны, так как $h(x_0)=(f(x_0)+g(x_0))/2$. Тогда эта прямая не имеет с параболами общих точек. Действительно, если бы прямая пересекала первую параболу в какой-то точке (x_0,y_0), то она бы пересекала и вторую параболу в той же точке, то есть графики $f(x)$ и $g(x)$ имели бы общие точки, что противоречит условию. Значит, прямая не пересекает параболы. Тогда исходные параболы лежат по разные стороны относительно этой прямой.

Комментарий. Построена прямая – 3 балла.

5. Число, большее 10, состоит из цифр 1, 3, 7, 9. Докажите, что оно делится на какое-нибудь простое число, большее 7.

Решение. Методом от противного: предположим, утверждение задачи не верно. Заметим, что на числа 2 и 5 исходное число делиться не может, так как иначе оно заканчивалось бы на 2 или 5. Тогда его простыми делителями могут быть только числа 3 и 7, т. е. число представляется в виде $3^k \cdot 7^l$. Докажем индукцией по $(k+l)$, что у чисел вида $3^k \cdot 7^l$ в десятичной записи в разряде десятков стоит чётная цифра, тем самым получив противоречие с условием.

База. $k+l = 0$. У числа $3^0 \cdot 7^0$ в разряде десятков стоит 0, т. е. чётное число.

Переход. Предположим, утверждение доказано для всех пар целых неотрицательных чисел (k,l), таких, что $k+l \leqslant n$. Докажем утверждение для пар $(k+1,l)$ и $(k,l+1)$, тем самым доказав утверждение для всех пар, сумма чисел в которых не больше n+1.

Пусть число $A=3^k \cdot 7^l$ имеет вид $\overline{\ldots xy}$. Тогда у числа 3A цифра в разряде десятков равна сумме последней цифры числа 3x и предпоследней цифры числа 3y. По предположению индукции, x чётно, поэтому последняя цифра 3x тоже чётна. Кроме того, y может быть равен только 1, 3, 7 или 9. Заметим, что при умножении этих чисел на 3 получаются числа с чётной цифрой в разряде десятков. Значит, у числа 3A в разряде десятков тоже будет чётная цифра. Для числа 7A рассуждение аналогично.

Комментарий. Обоснованно предложен общий вид числа как разложения на степени тройки и семерки – 2 балла. На примерах показано наличие четной цифры в разряде десятков – 2 балла.

Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2025-2026 учебном году

11 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

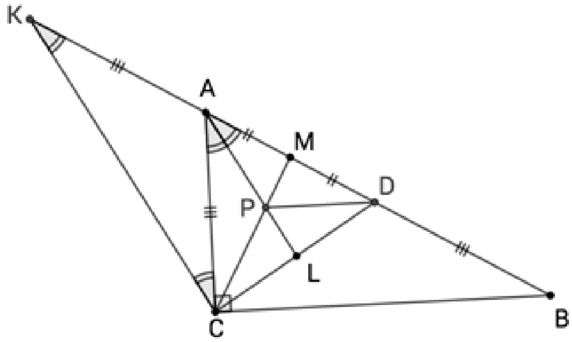
1. По кругу стоят несколько человек. Каждый из них сказал: «Один из моих соседей тяжелее меня, а другой – легче меня». Известно, что веса любых двух людей различны. Могло ли случиться, что среди стоящих солгали ровно 2025 человек?

Решение. Лжецы, очевидно, те, у кого оба соседа легче них (назовем таких лжецов *толстыми*), или оба соседа тяжелее них (назовем таких лжецов тонкими). Если двигаться по кругу, начиная с тонкого лжеца, то веса людей будут расти до следующего лжеца, и этот лжец, очевидно, будет толстым. Аналогично, если начать двигаться с толстого лжеца, то веса людей до следующего лжеца будут убывать, и этот следующий лжец будет тонким. Таким образом, толстые и тонкие лжецы в круге чередуются, поэтому их должно быть поровну, а всех лжецов вместе – четное число. Но 2025 – число нечетное, т.е. ситуация невозможна.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку D так, что BD = AC. Докажите, что в треугольнике ACD биссектриса AL, медиана CM и высота DH пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть AL и CM пересекаются в точке P (см. рисунок). Тогда утверждение задачи сводится к доказательству того, что DH проходит через точку P.



На продолжении гипотенузы AB отметим точку K так, чтобы AK = BD = AC. Тогда AP – биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника CAK, следовательно, AP || KC. Тогда по теореме Фалеса: MP : PC = MA : AK.

Учитывая, что MA = MD и AK = BD, получим: MP:PC = MD:DB, значит – DP || BC. Так как BC перпендикулярно AC, то DP перпендикулярно AC, то есть DH проходит через точку P, что и требовалось.

Комментарий. Предложено достроение по симметрии – 1 балл.

3. На горизонтальной прямой находится робот, который управляется буквами русского алфавита. Если на вход робота поступает гласная буква и ей предшествовала согласная буква, то робот смещается на 77 метров вправо. Если на вход робота поступает согласная буква и ей предшествовала гласная буква, то робот смещается на 11 метров влево. Если на вход робота поступает гласная буква, которой предшествовала гласная буква, или согласная буква, которой предшествовала согласная буква, то робот смещается на 33 метра вправо. При поступлении первой буквы робот не

двигается. На каком расстоянии от начальной точки окажется робот после того, как на его вход поступят (в алфавитном порядке) все буквы русского алфавита, кроме мягкого и твердого знаков? (Всего в русском алфавите 33 буквы.)

Ответ: в результате робот сместится на 990 метров.

Решение. В русском алфавите 33 буквы. После удаления мягкого и твердого знака остается 31 буква. Соответственно, всего робот сделает 30 ходов. Первая и последняя буквы русского алфавита гласные (А и Я). Поэтому количество переходов гласная / согласная равно количеству переходов согласная / гласная. Обозначим это количество k. Тогда общее количество переходов гласная / гласная и согласная / согласная равно (30 – 2k). Теперь мы можем найти результирующее смещение робота:

$$S = 77k + (-11)k + (30 - 2k) * 33 = 990$$

Замечание. В данной задаче ответ не зависит ни от количества гласных букв в русском алфавите (оно равно 10), ни от точного значения k (оно равно 5).

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов.

4. У квадратных трёхчленов $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ выписали на доску все корни. Оказалось, что выписано ровно 3 различных числа. Докажите, что у какого-то из трёхчленов $f(x)$, $g(x)$ или $f(x)+g(x)$ ровно один корень.

Решение. Предположим, что ни у одного из этих трёхчленов нет ровно одного корня. Тогда у каждого из них чётное количество корней, поэтому чтобы получить ровно 3 различных числа, некоторые корни должны совпасть. Заметим, что если у каких-то двух из этих трёхчленов совпадает корень x_0, то x_0 также будет и корнем третьего многочлена. Тогда у каждого многочлена есть ещё ровно по одному корню — назовём их x_1, x_2, x_3. При этом ни одно из чисел x_1, x_2, x_3 не равно x_0, так как иначе какой-то из трёхчленов имел бы один корень. Если никакие из чисел x_1, x_2, x_3 не совпадают, то всего выписано 4 различных числа. Если же какие-то два совпадут, то совпадёт и третье, и тогда различных чисел будет 2. Противоречие.

Комментарий. Сформулирована идея о том, что «если у каких-то двух из этих трёхчленов совпадает корень x_0, то x_0 также будет и корнем третьего многочлена» – 2 балла.

5. Докажите, что для неотрицательных x_1, x_2, …, x_n, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n) \leq 2n!$$

Решение. Заметим, что если

$$x_1 = 1, \text{а } x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0,$$

то неравенство обращается в равенство. Предположим, что в исходном наборе $x_1 \neq 1$. Тогда найдётся такое $k \neq 1$, что $x_k > 0$.

Рассмотрим новый набор $y_1, y_2, \dots, y_n$, в котором $y_i=x_i$ для всех i кроме 1 и k, $y_1=x_1+x_k$, а $y_k=0$. Заметим, что сумма чисел этого набора равна 1 и

$$(1 + y_1)(2 + y_2) \dots (n + y_n) = (1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n) \cdot \frac{(1 + x_1 + x_k) \cdot k}{(1 + x_1)(k + x_k)}$$

Докажем неравенство

$$\frac{(1 + x_1 + x_k) \cdot k}{(1 + x_1)(k + x_k)} > 1,$$

которое равносильно неравенству $(1 + x_1 + x_k) \cdot k > (1 + x_1)(k + x_k)$. Действительно,

$$(1 + x_1 + x_k) \cdot k \geq k + kx_1 + 2x_k > k + kx_1 + (1 + x_1)x_k = (1 + x_1)(k + x_k)$$

Тут мы воспользовались сначала тем, что $k \geqslant 2$, а потом тем, что $x_1<1$. Таким образом, при переходе к новому набору значение произведения

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n)$$

увеличивается. При этом количество нулей в наборе увеличилось хотя бы на 1. Повторяя аналогичные действия, в какой-то момент мы перейдём к набору, в котором x_1=1, а все остальные xi=0, для которого выполнено равенство. Таким образом, изначальное неравенство было верно.

Комментарий. Построена оценка значения произведения при перехода к более объемному набору чисел от меньшего – 3 балла.