Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

7 класс

2023-2024 учебный год

7.1. Можно ли разложить девять гирек массой от 1 до 9 грамм в три одинаковых коробки так, чтобы в одной коробке было две гирьки, в другой – три, а в третьей – четыре, и при этом масса коробок с гирями была одинаковой?

7.2. В следующих многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные – разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

7.3. В одном городе 20% семей, имеющих кошек, имеет также собак, 25% семей, имеющих собак, имеет также и кошек, а 20% всех семей не имеют ни кошек, ни собак. Какой процент семей в этом городе имеет и кошек, и собак?

7.4. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге – лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги сказали: «Мой сосед по шеренге – лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2023 воина?

7.5. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 $м^2$, а когда их положили в соседние углы, то 14 $м^2$. Каковы размеры зала?

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

7 класс

2023-2025 учебный год

7.1. Можно ли разложить девять гирек массой от 1 до 9 грамм в три одинаковых коробки так, чтобы в одной коробке было две гирьки, в другой – три, а в третьей – четыре, и при этом масса коробок с гирями была одинаковой?

Ответ: Да, можно.

Решение. Сумма масс девяти данных гирек равна 1+2+3+…+9=45 (г), следовательно, масса гирек в каждой коробке должна быть равна 15 граммам. Все возможные варианты размещения гирек по коробкам показаны в таблице.

7.2. В следующих многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные – разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

Ответ: Не может.

Решение. Сразу ясно, что буква О означает цифру 0 (нуль), иначе не будет делимости на 90. Всего использовано 10 различных букв, значит, и зашифрованы все 10 цифр. Так как букве О соответствует цифра 0, то сумма всех цифр, соответствующих остальным девяти буквам, равна 45, т.е. кратна 9. Сумма Д+Е+В+Я+Н+С+Т делится на 9, а также Д+Е+В+Я+Т+К+А делится на 9. Значит, Н+С и К+А делятся на 9. Предположим, что СОТКА делится на 9, тогда С+Т+К+А делится на 9. Но раз К+А делится на 9, то и С+Т делится на 9. Имеем: Н+С и Т+С оба делятся на 9. Значит, Н и Т дают одинаковые остатки при делении на 9. Но из цифр это могут быть только 0 и 9, а 0 занят буквой О. Получили противоречие, значит, сделали неправильное предположение и СОТКА не делится на 9.

7.3. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей? 5. В одном городе 20% семей, имеющих кошек, имеет также собак, 25% семей, имеющих собак, имеет также и кошек, а 20% всех семей не имеют ни кошек, ни собак. Какой процент семей в этом городе имеет и кошек, и собак?

Ответ: 10% семей.

Решение: Пусть $\boldsymbol{x}$ семей имеет и кошек, и собак. По условию 20% (или 1/5) всех семей, имеющих кошек, имеет и собак. Значит, кошек имеет $5\boldsymbol{x}$ семей. Поскольку 25% (или 1/4) семей, имеющих собак, имеет и кошек, то собак имеет $4\boldsymbol{x}$ семей. Итак, $\boldsymbol{x}$ семей имеет и кошек, и собак, $4\boldsymbol{x}$ семей – только кошек, $3\boldsymbol{x}$ семей – только собак. Всего получается $\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{x} = 8\boldsymbol{x}$ семей, имеющих животных. По условию они составляют 80% всех семей в этом городе. Значит, всего в городе $8\boldsymbol{x} : 80 \cdot 100 = 10\boldsymbol{x}$ семей, среди них $\boldsymbol{x}$ семей имеет и кошек, и собак. Они составляют 1/10, или 10%.

7.4. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге – лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги сказали:

«Мой сосед по шеренге – лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2023 воина?

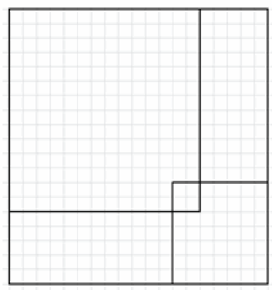
Ответ. 1012.

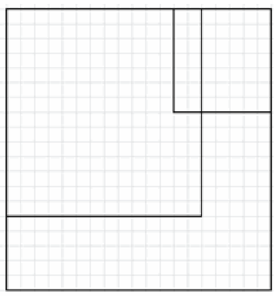
Решение: Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2022 воинов на 1011 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, т.е. среди рассматриваемых 2022 воинов не боле 1002 рыцарей, т.е. всего в шеренге не более 1011 + 1 = 1012 рыцарей. Рассмотрим шеренгу РЛРЛР…РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1012 рыцаря.

7.5. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м², а когда их положили в соседние углы, то 14 м². Каковы размеры зала?

Ответ. 19×19 м^2.

Решение: В первом случае пересечением ковров является квадрат площади 4 м² (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 м. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 2 м (рис. справа). Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна14 : 2 = 7 (м), а это и есть длина стороны меньшего ковра. Значит, сторона большего ковра имеет длину 14 м. Так как стороны ковров накладываются друг на друга на 2 м, то длина стороны зала равна 7 + 14 – 2 = 19 (м).





Всероссийская олимпиада школьников по математике.

Муниципальный этап. 2023 – 2024 уч.год.

8 класс

1. Сколько всего есть четырехзначных чисел, которые делятся на 19 и оканчиваются на 19? Перечислите их. Ответ обоснуйте.

2. Иван Иванович желает приобрести себе сувенир на память о путешествии, который стоит 2000 рублей. Достаточно ли у него денег на покупку, если у него имеется $400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$?

3. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p + q)^2$

4. В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что $BC + CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 120\circ$. Найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

5. Путешественник выходит из гостиницы в 3 часа дня и возвращается в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он идёт со скоростью 4 км/час, в гору - 3 км/час, под гору - 6 км/час. Найдите расстояние, которое прошёл путешественник, если он шёл без отдыха.

Решение олимпиадных задач и критерии оценивания

Задача №1

Сколько всего есть четырехзначных чисел, которые делятся на 19 и оканчиваются на 19? Перечислите их. Ответ обоснуйте.

Решение:

Пусть $N = \overline{xy19}$ — такое число. Тогда N – 19 тоже кратно 19. Но $N - 19 = \overline{xy00} = \overline{xy} \cdot 100.$ Поскольку 100 и 19 взаимно просты, то двузначное число делится на 19. А таких всего пять: 19, 38, 57, 76 и 95. Легко убедиться, что все числа 1919, 3819, 5719, 7619 и 9519 нам подходят.

Баллы	*Критерии оценивания решения*

7	Дан верный ответ. Перечислены все варианты. Представлено полное, логически верное обоснование.
6 – 5	Дан верный ответ. Перечислены все верные варианты. Идея решения понятна и верна, но недостаточно обоснования
4 - 3	Указана кратко идея решения, перечислены некоторые верные варианты, но не хватает подробного обоснования.
2	Дан верный ответ. Перечислены все варианты. Ответ подтверждается с помощью проверки.
1	Перечислены хотя бы 3 числа, без обоснования
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №2

Иван Иванович желает приобрести себе сувенир на память о путешествии, который стоит 2000 рублей. Достаточно ли у него денег на покупку, если у него имеется $400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$?

Решение:

$$\text{Пусть } x = 400. \text{Выполним замену}$$

$$\begin{aligned} x^5 - (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) \\ &= x^5 - (x-1)(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - x^3 - 2x^2 - 3x - 4) \\ &= x^5 - (x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x - 4x + 4) = 5x - 4 \end{aligned}$$

Так как x= 400, 5x-4 = 2000-4…. Ответ: нет, денег недостаточно

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Ответ верный. Полное верное решение, выполненное рациональным способом.
6	Дан верный ответ. Решение выполнено стандартным способом, как пример по действиям.
5-4	Дан верный ответ. Решение выполнено стандартным способом, как пример по действиям, но присутствует вычислительная ошибка (одна), которая не повлияла на верный вывод
2–3	Дан верный ответ. Присутствуют попытки рационального вычисления, но решение не доведено до конца.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №3

Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 – q^5 = (p + q)^2$

Решение:

Пусть сначала ни одно из чисел p, q не делится на 3. Если остатки от деления p и q на 3 совпадают, то левая часть делится на 3, а правая – нет. Если эти остатки не совпадают, то правая часть делится на 3, а левая – нет. Пусть теперь p делится на 3, тогда p =3. Из равенства $p^3 - q^5 = (p + q)^2 > 0$ следует $p^3 > q^5$ и $q^5 < 27,$ что невозможно. Пусть, наконец, q делится на 3, тогда q =3 и $p^3 - 243 = (p + 3)^2, p(p^2 - p - 6) = 252,$ откуда p - простой делитель 252, то есть 2,3 или 7. Проверка оставляет только p =7, $(p, q) = (7,3)$.

Ответ: p = 7, q=3

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6 - 5	Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
4	Дан верный ответ. Присутствуют попытки обоснования, например, относительно левой и правой части и сравнения p и q. Но обоснований недостаточно.
3 - 2	Дан верный ответ при отсутствии решения, но верный ответ подтверждается выполненной проверкой.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №4

В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что BC+CL = AB. Зная, что $\angle ABC$ = 120∘. Найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

Решение.

Отметим на отрезке AB точку K так, чтобы BK = BC. Получим два равных треугольника BKL и BCL (по 2 сторонам и углу между ними). Так как BC+CL = AB, то $AK = LC = KL$. Получим равнобедренный треугольник AKL с равными углами при основании: A и L. $= \angle BKL$ – внешний угол треугольника AKL и равен сумме двух внутренних углов не смежных с ним. Значит, $\angle BCA = \angle BKL = 2\angle BAC$. Осталось найти искомый угол. В треугольнике BAC: 120^0 + BAC +2$\angle BAC$ = 180^0. Отсюда следует, что $\angle BAC = 20^0$

Ответ: 20^0.

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6	Дан неверный ответ, из – за вычислительные ошибки или описки, недочета. Идея решения понятна и верна.
5	Ответ верный. Решение содержит незначительные пробелы, неточности или некорректность в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
4-3	Задача не завершена, но есть верные выводы, свидетельствующие о продвижении в решении задачи: выполнено дополнительное построение, обосновано наличие равнобедренных треугольников.
2	Дан верный ответ. Решение очень краткое. Имеется набор действий без обоснования.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №5

Путешественник выходит из гостиницы в 3 часа дня и возвращается в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он идёт со скоростью 4 км/час, в гору - 3 км/час, под гору - 6 км/час. Найдите расстояние, которое прошёл путешественник, если он шёл без отдыха.

Решение:

Один км пути по ровной местности путешественник проходят за 1/4 часа. Поднимаясь в гору, он преодолевают один км за 1/3 часа, а спускаясь с горы, — за 1/6 часа. Следовательно, на то, чтобы пройти туда и обратно один км, независимо от того, пролегает ли его путь по долине или по склону горы, у нашего путешественника всегда уходит 1/2 часа. Таким образом, за 6 часов (с 3 до 9) он прошел 12 км в одну сторону и 12 км — в другую. Значит всего 24 км. Задачу можно решить и с помощью уравнения, обозначив, путь по ровной местности за x, а путь в гору за y. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=6$ часов. Получим, что x+ y = 12 км. – это путь в одну сторону.

Ответ: 24 км

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6	Дан неверный ответ, из – за вычислительные ошибки или описки, недочета. Идея решения понятна и верна.

5 - 4	Ответ верный. Решение содержит незначительные пробелы, неточности или некорректность в обоснованиях, но в целом идея решения понятна.
3-2	Задача не завершена, но есть верные выводы, свидетельствующие о продвижении в решении задачи.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения - 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– Не спеша, внимательно прочитайте задания;
– Не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
– Задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
– После выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Максимальная сумма баллов – 35.

9.1. В шахматном фестивале участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл ровно с пятью немцами и двумя французами, каждый немец – с шестью англичанами и четырьмя французами, а каждый француз – с тремя англичанами и с одинаковым числом немцев. Найдите это число.

9.2. Корни уравнения $x^2+ax+1=b$ – целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число a^2+b^2 является составным.

9.3. В треугольнике ABC угол C равен $135°$. На стороне AB вне треугольника построен квадрат с центром O. Найдите OC, если $AB = 6$.

9.4. Отличница Маша хочет выписать два нуля, две единицы, две двойки, …, две девятки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами стояла одна цифра, между двойками – 2 цифры, …, между девятками – 9 цифр. Докажите, что у нее это не получится.

9.5. В соревнованиях лыжников оказалось, что стартовый номер лыжника в сумме с занятым им местом равен либо 97, либо 96, либо 95. Причем, все эти числа: 97, 96 или 95 хотя бы один раз встретились. Сколько лыжников участвовало в соревнованиях?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Необходимо учитывать следующее:

1) По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;
2) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;
3) Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;
4) Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;
5) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
6) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

9.1. В шахматном фестивале участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл ровно с пятью немцами и двумя французами, каждый немец – с шестью англичанами и четырьмя французами, а каждый француз – с тремя англичанами и с одинаковым числом немцев. Найдите это число.

Ответ: 5.

Решение: Пусть в фестивале участвовало $\boldsymbol{x}$ англичан, $\boldsymbol{y}$ немцев и $\boldsymbol{z}$ французов. Тогда англичане сыграли $5\boldsymbol{x}$ партий с немцами и $2\boldsymbol{x}$ партий с французами, немцы сыграли $6\boldsymbol{y}$ партий с англичанами и $4\boldsymbol{y}$ партий с французами, а французы – $3\boldsymbol{z}$ партий с англичанами и $\boldsymbol{kz}$ партий с немцами, где $\boldsymbol{k}$ - искомое число. Значит, должны выполняться равенства: $5x = 6y$, $2x = 3z$ и $4y = kz$. Следовательно, $k = \frac{4y}{z} = 4 \cdot \frac{\frac{5}{6}x}{\frac{2}{3}x} = 5$

9.2. Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ – целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Решение: Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена.

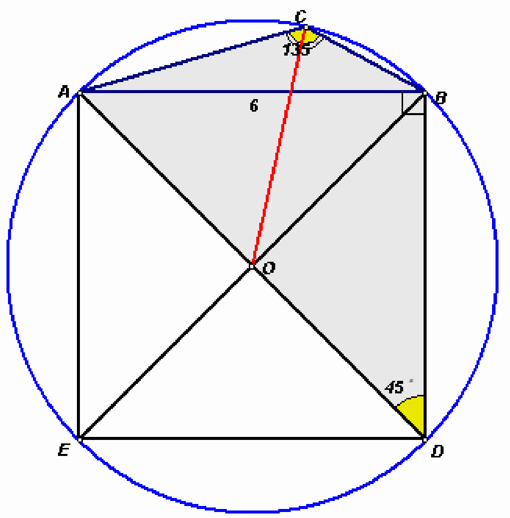
Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a,\ \ x_1x_2 = 1 - b$.

Поэтому $a^2 + b^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$. При ненулевых значениях x_1, x_2 это равенство дает разложение числа $a^2 + b^2$ на множители, отличные от 1.

Комментарий. Не показано, что множители больше 1 – не более 5 баллов.

9.3. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 135°. На стороне *AB* вне треугольника построен квадрат с центром *O*. Найдите *OC*, если *AB* = 6.

Решение. Пусть *ABDE* – построенный квадрат. Его диагональ образует со стороной угол 45°, значит, $\angle ACB + \angle ADB = 180°$ (см. рис.). Следовательно, около четырёхугольника *ACBD* можно описать окружность. Так как угол *ABD*, вписанный в эту окружность, прямой, то центр *O* окружности является серединой диагонали *AD* квадрата, то есть его центром. Тогда *OC* – радиус этой окружности. Таким образом, $OC = \frac{1}{2}AD = 3\sqrt{2}$



Комментарий. Доказано равенство углов QOP и QAP – 3 балла. Доказано, что точки A, O, Q, P лежат на одной окружности – 4 балла.

9.4. Отличница Маша хочет выписать два нуля, две единицы, две двойки, …, две девятки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами стояла одна цифра, между двойками – 2 цифры, …, между девятками – 9 цифр. Докажите, что у нее это не получится.

Решение: Пусть Маша записывает числа в клетки прямоугольника 1х20. Покрасим клетки этого прямоугольника в шахматном порядке. Получим 10 черных и 10 белых клеток. Клетки, между которыми нечетное число клеток, покрашены в один цвет, а клетки, между которыми четное число клеток, - в разные цвета.

Назовем пару одинаковых цифр одноцветной, если обе цифры записаны в клетки одинакового цвета. В противном случае назовем эту пару разноцветной.

Допустим, что у Маши получится. Тогда цифры пары (0, 0), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8) будут разноцветными, а остальные пары – одноцветными. Значит, клеток каждого цвета должно быть нечетное количество – пять от разноцветных пар и четное число от одноцветных. Но в прямоугольнике клеток каждого цвета по десять. Полученное противоречие показывает, что Маша не сможет выписать цифры требуемым образом.

9.5. В соревнованиях лыжников оказалось, что стартовый номер лыжника в сумме с занятым им местом равен либо 97, либо 96, либо 95. Причем, все эти числа: 97, 96 или 95 хотя бы один раз встретились. Сколько лыжников участвовало в соревнованиях?

Ответ: 95.

Решение. *Оценка*.

Первый случай. Стартовало не более 96 лыжников, иначе номер стартовавшего последним в сумме с номером места будет больше 97.

Второй случай. Стартовало не менее 94, иначе номер стартовавшего первым в сумме с номером места будет меньше 95.

Третий случай. Пусть стартовало 96 лыжников. Пусть первый занял место m_1, второй m_2, …, девяносто шестой место m_{96}. Ясно, что $m_1 + 1 \leq 97,\ m_2 + 2 \leq 97, \ldots, m_{96} + 96 \leq 97$. Сложив, получим, $m_1 + m_2 + \cdots + m_{96} + 1 + 2 + \cdots + 96 \leq 97 \cdot 96$, или $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 96) \leq 96 \cdot 97$. Поскольку в последнем неравенстве на самом деле равенство, то оно было и во всех других неравенствах, и сумма номера и места была равна только 97. Что невозможно.

Четвертый случай. Пусть стартовало 94 лыжника. Пусть первый занял место m_1, второй m_2, …, девяносто четвертый место m_{94}. Ясно, что $m_1 + 1 \geq 95,\ m_2 + 2 \geq 95, \ldots, m_{94} + 94 \geq 95$. Сложив, получим, $m_1 + m_2 + \cdots + m_{94} + 1 + 2 + \cdots + 94 \geq 95 \cdot 94$, или $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 94) \leq 95 \cdot 94$. Поскольку в последнем неравенстве на самом деле равенство, то оно было и во всех других неравенствах, и сумма номера и места была равна только 95. Что невозможно.

Значит, лыжников могло стартовать только 95.

Пример. Построим следующий пример. Первое слагаемое в каждой сумме – это стартовый номер: 1+95=96, 2+94=96, …, 47+49=96, 48+47=95, 49+48=97, 50+46=96, 51+45=96, …, 95+1=96.

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 0 баллов. Верно получена оценка (без примера) – 4 балла, верно построен пример (без оценки) – 2 балла.

Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2023 – 2024 учебном году

10 класс

1. На всемирный конгресс съехалось 2023 математика. Оказалось, что среди любых пяти из них найдется по крайней мере один, знакомый со всеми остальными из этой пятерки. Можно ли отсюда заключить, что на конгрессе присутствует математик, знакомый со всеми участниками конгресса?
2. Докажите, что $\frac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{3+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{199+\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}}>19700$.
3. В выпуклом шестиугольнике ABCDEF противоположные стороны параллельны и равны. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.
4. При каких натуральных n число 2^n+1 является степенью тройки?
5. Докажите, что число $\sin 18°$ является корнем уравнения $4x^2 + 2x = 1$.

Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2023 – 2024 учебном году

10 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. На всемирный конгресс съехалось 2023 математика. Оказалось, что среди любых пяти из них найдется по крайней мере один, знакомый со всеми остальными из этой пятерки. Можно ли отсюда заключить, что на конгрессе присутствует математик, знакомый со всеми участниками конгресса?

Ответ. Да, утверждение справедливо.

Решение. Докажем методом от противного: пусть у каждого математика есть хотя бы один незнакомый ему участник конгресса. Тогда, поскольку число участников нечетное, найдется математик А, у которого не менее двух незнакомых на конгрессе (пусть это математики Б и В) – в противном случае всех присутствующих можно было бы разбить на пары «незнакомцев», а при 2023 участниках это невозможно.

Заметим, что тогда любые два из оставшихся 2020 математиков знакомы между собой, в противном случае эти двое вместе с А, Б и В образовывали бы пятерку, противоречащую условию.

Возьмем двух любых из этих оставшихся 2020 математиков, например, Ю и Я. Хотя бы один из них знаком со всеми из тройки А, Б и В (иначе пятерка А, Б, В, Ю, Я противоречила бы условию) – а поскольку по предыдущему он знаком и с каждым из остальных участников конгресса – он знаком со всеми его участниками.

Комментарий. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов. Доказано существование участника с двумя «незнакомцами» – 3 балла.

2. Докажите, что $\frac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{3+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{199+\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}} > 19700$.

Решение.

Преобразуем каждое из слагаемых:

$$\frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n^2+1}{n+1}.$$

Для доказательства неравенства оценим каждое слагаемое снизу:

$$\frac{n^2+1}{n+1}>\frac{n^2-1}{n+1}=n-1.$$

Тогда

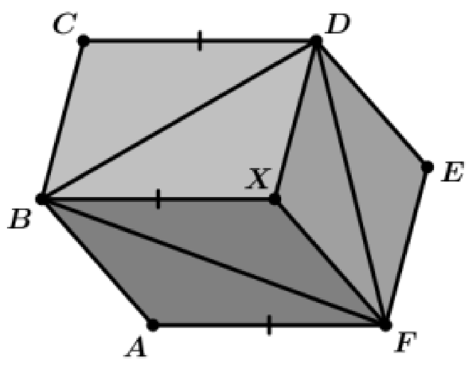
$$\frac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{3+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{199+\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}}>0+1+2+\cdots+198=\frac{0+198}{2}\cdot 199=19701,$$

следовательно, $\frac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{3+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{199+\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}}>19700$.

Комментарий. Получена базовая оценка – 2 балла.

3. В выпуклом шестиугольнике ABCDEF противоположные стороны параллельны и равны. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

Решение. Докажем, что площади обоих треугольников равны половине площади шестиугольника, из этого будет следовать утверждение задачи.



Для этого отметим такую точку X, что четырехугольник ABXF является параллелограммом. Тогда отрезки AF и BX равны и параллельны. Но отрезки AF и CD также равны и параллельны, поэтому четырехугольник BCDX является параллелограммом. Аналогично DEFX параллелограмм. Тогда площади треугольников ABF и XBF, BCD и BXD, DEF и DXF равны. Но треугольники XBF, BXD и DXF составляют треугольник BDF. Таким образом, площадь треугольника BDF равна половине площади исходного шестиугольника.

Комментарий. Построено обоснованное разбиение шестиугольника на параллелограммы – 3 балла. Сформулирована идея о равенстве площадей треугольников половине площади шестиугольника – 2 балла.

4. При каких натуральных n число 2^n+1 является степенью тройки?

Ответ. При n=1 и n=3.

Решение. Проверим, что для n=1 условие выполнено: $2^1+1=3^1$. Теперь будем искать другие решения, считая $n\geqslant 2$.

Пусть $2^n+1=3^k$ для $n\geqslant 2$ и некоторого натурального числа k. Число 2^n делится на 4, поэтому левая часть при делении на 4 даёт остаток 1. Значит, и правая часть 3^k даёт остаток 1 при делении на 4. Заметим, что $3 \equiv (-1)(mod\ 4)$ – то есть при нечётном k число 3^k всегда даёт остаток 3 при делении на 4, а при чётном k – остаток 1. Следовательно, k чётно. Тогда

$$2^n = 3^k - 1 = (3^{k/2}-1)(3^{k/2}+1).$$

Числа $3^{k/2}-1$ и $3^{k/2}+1$ − последовательные чётные числа. Из предыдущего равенства следует, что они оба являются степенями двойки (иначе в их произведении будет содержаться «посторонний» простой делитель). Их разность равна 2 и не делится на 4, поэтому хотя бы одно из них не делится на

4 и при этом является степенью двойки. Следовательно, оно равно 2, а второе (большее) число равно 4. Тогда $3^{k/2}-1 = 2$, откуда k=2, и $2^n=8$, поэтому n=3.

Комментарий. Дан правильный ответ без доказательства полноты решения – 1 балл. Доказана чётность степени k – 3 балла.

5. Докажите, что число sin 18° является корнем уравнения $4x^2 + 2x = 1$.

Решение. По формулам приведения $\sin(3\cdot18°) = \cos(2\cdot18°)$, то есть, обозначив $\sin 18° = x$, получим:

$\sin(3\cdot18°) = 3\sin18° - 4\sin^3 18° = 3x - 4x^3$ (формула синуса тройного угла может быть получена из формулы синуса суммы $\sin3x=\sin(2x+x)$),

$\cos(2\cdot18°) = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2x^2$.

Пришли к уравнению $3x - 4x^3 = 1 - 2x^2$. Полученное уравнение можно записать в виде $(4x^2 + 2x - 1)(x - 1) = 0$. Поскольку $x \neq 1$, то $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Комментарий. Использован факт, что $90° = 3\cdot18° + 2\cdot18°$ – 1 балл. Из тригонометрических соображений построено алгебраическое уравнение – 4 балла. Приведена геометрическая интерпретация задачи – 3 балла, дано полное решение на основании геометрической интерпретации – 7 баллов.

Задания муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

11 класс

1. В кондитерский лицей поступили 11 мальчиков и несколько девочек – причём некоторые из них были ранее знакомы между собой. На 1 сентября директор лицея принес большой пакет со 165 конфетами. Каждая девочка дала по конфете (из пакета) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по конфете (из пакета) каждой незнакомой ему девочке. После этого конфеты в пакете закончились. Сколько девочек поступило в лицей?
2. В треугольнике ABC $\angle A=110°$, $\angle B=50°$. На стороне AC выбрана такая точка P, что $\angle PBA=30°$, а на стороне BC — такая точка Q, что $\angle CAQ=40°$. Найдите угол QPB.
3. Пусть $P_n(x)$ – произвольный многочлен степени n с целочисленными коэффициентами такой, что целые числа $P_n(1)$ и $P_n(2)$ дают равные остатки при делении на 2022. Всегда ли совпадают остатки при делении на 2022 чисел $P_n(2023)$ и $P_n(2024)$?
4. Банкиры Пётр и Василий играют в игру: они по очереди изымают средства из межбанковского фонда, первоначально содержащего 1331 золотую монету, причем первый ход делает Пётр и берёт 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берёт (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?
5. Назовем усложнением числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

Задания муниципального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике

в 2023 – 2024 учебном году

11 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. В кондитерский лицей поступили 11 мальчиков и несколько девочек – причём некоторые из них были ранее знакомы между собой. На 1 сентября директор лицея принес большой пакет со 165 конфетами. Каждая девочка дала по конфете (из пакета) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по конфете (из пакета) каждой незнакомой ему девочке. После этого конфеты в пакете закончились. Сколько девочек поступило в лицей?

Ответ. 15 девочек.

Решение 1. Пусть каждая девочка заберёт обратно конфеты, которые она отдала мальчикам. Таким образом, каждая девочка получит по конфете от каждого знакомого мальчика (которые она забрала), а также по конфете от каждого незнакомого мальчика (которые они сами ей отдали). Тогда каждая девочка получит ровно по одной конфете от каждого мальчика, т. е. суммарно 11 конфет. Так как всего конфет было 165, то девочек ровно 15.

Решение 2. Построим двудольный граф знакомств. В одной доле будут вершины, соответствующие мальчикам, а в другой доле — вершины, соответствующие девочкам. Если мальчик и девочка были уже знакомы, то будем соединять соответствующие вершины ребром синего цвета, а если незнакомы — то ребром красного цвета.

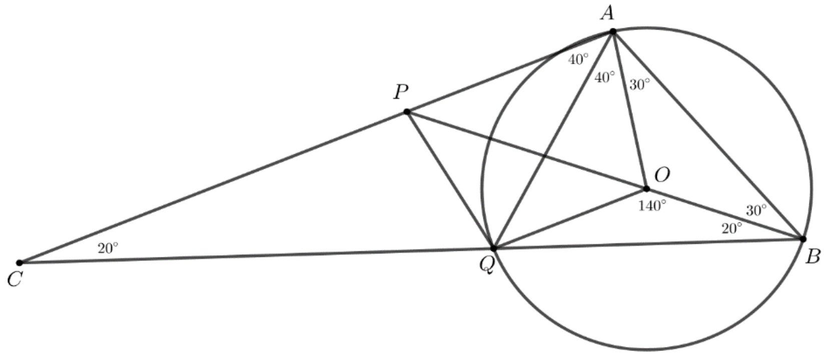
Тогда каждая девочка отдала столько конфет, сколько из соответствующей вершины выходит синих рёбер, а каждый мальчик отдал столько конфет, сколько из соответствующей вершины выходит красных рёбер. Заметим, что при этом каждое ребро (и красное, и синее) участвовало ровно в одной передаче. Поэтому количество конфет равно суммарному количеству рёбер. Если в классе учится x девочек, то всего рёбер между долями ровно $11x$. Значит, $11x=165$, т.е. $x=15$.

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 1 балл. При решении задачи с помощью графов правильно построен граф – 2 балла.

2. В треугольнике ABC $\angle A=110°$, $\angle B=50°$. На стороне AC выбрана такая точка P, что $\angle PBA=30°$, а на стороне BC — такая точка Q, что $\angle CAQ=40°$. Найдите угол QPB.

Ответ. 40°.

Решение.



Отметим точку O — центр описанной окружности треугольника AQB. Так как

∠QOB=2∠QAB =2(110°−40°)=140°, то

∠QBO =(180°−140°)/2=20°=∠QBP, то есть точка O лежит на отрезке BP.

При этом ∠QOP=180°−140°=40°=∠QAP,

поэтому точки A, O, Q, P лежат на одной окружности. Поэтому

∠QPB =∠QAO =∠QAB−∠OAB =70°−30°=40°.

Комментарий. Доказано равенство углов QOP и QAP – 3 балла. Доказано, что точки A, O, Q, P лежат на одной окружности – 4 балла.

3. Пусть $P_{\text{n}}(x)$ – произвольный многочлен степени n с целочисленными коэффициентами такой, что целые числа $P_{\text{n}}(1)$ и $P_{\text{n}}(2)$ дают равные остатки при делении на 2022. Всегда ли совпадают остатки при делении на 2022 чисел $P_{\text{n}}(2023)$ и $P_{\text{n}}(2024)$?

Ответ. Да, всегда.

Решение. Пусть: $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Тогда

$P_n(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $P_n(2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$.

Рассмотрим величину

$P_n(2023) = a_0 + a_1 \cdot 2023 + a_2 \cdot 2023^2 + \cdots + a_n \cdot 2023^n$.

Её можно представить в виде:

$$P_n(2023) = a_0 + a_1 \cdot 2023 + a_2 \cdot 2023^2 + \cdots + a_n \cdot 2023^n =$$

$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_1 \cdot (2023 - 1) + a_2 \cdot (2023^2 - 1) + \dots +$
$a_n \cdot (2023^n - 1)$.

Поскольку $(2023 - 1) \vdots 2022$, $(2023^2 - 1) = 2022 \cdot 2024 \vdots 2022$

и для любого натурального k>2

$2023^k - 1 = 2023^k - 1^k = (2023 - 1)(2023^{k-1} + 2023^{k-2} + \dots + 1) \vdots 2022,$

то $P_n(2023)$ будет иметь тот же остаток при делении на 2022, что и $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = P_n(1)$.

Аналогично, рассмотрим величину

$P_n(2024) = a_0 + a_1 \cdot 2024 + a_2 \cdot 2024^2 + \dots + a_n \cdot 2024^n =$

$= P_n(2) + a_1 \cdot (2024 - 2) + a_2 \cdot (2024^2 - 2^2) + \dots + a_n \cdot (2024^n - 2^n)$.

Поскольку $(2024 - 2) \vdots 2022$, $(2024^2 - 2^2) = 2022 \cdot 2026 \vdots 2022$

и для любого натурального k>2

$2024^k - 2^k = (2024 - 2)(2024^{k-1} + 2024^{k-2} \cdot 2 + \dots + 2^{k-1}) \vdots 2022,$

то $P_n(2024)$ будет иметь тот же остаток при делении на 2022, что и $P_n(2)$.

Так как $P_n(1)$ и $P_n(2)$ дают равные остатки при делении на 2022, то и $P_n(2023)$ с $P_n(2024)$ также будут давать равные остатки при делении на 2022.

Комментарий. Доказана связь между $P_n(1)$ и $P_n(2023)$, $P_n(2)$ и $P_n(2024)$– 3 балла.

4. Банкиры Пётр и Василий играют в игру: они по очереди изымают средства из межбанковского фонда, первоначально содержащего 1331 золотую монету, причем первый ход делает Пётр и берёт 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берёт (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не

может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

Ответ. Пётр.

Решение. Пусть Пётр независимо от действий Василия берёт первым ходом 1 монету, вторым – 2, третьим – 3 и т.д., увеличивая каждый раз количество взятых монет на 1. Это не противоречит правилам, так как при такой игре Петра Василий сможет первым ходом взять только 1 или 2 монеты, вторым – только 2 или 3 и т.д. Тогда после k-го хода Петра игроки возьмут монет не менее

$$(1 + 2 + ... + k) + (1 + 2 + ... + (k - 1)) = k^2$$

и не более

$$(1 + 2 + ... + k) + (2 + 3 + ... + k) = k(k + 1) – 1.$$

Заметим, что после 36-го хода Петра из фонда должно быть взято от $36^2 = 1296$ монет до $36 \cdot 37 – 1 = 1331$ монеты. Так как изначальный объем фонда – 1331 монета, то на 36-й ход Петра его в любом случае хватит. Но после этого хода в фонде останется от 0 до $1331 – 1296 = 35$ монет, следовательно, Василий не сможет сделать 36-й ход по правилам.

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 0 баллов. Показана, но не обоснована выигрышная стратегия Петра – 3 балла.

5. Назовем усложнением числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

Ответ. Существует.

Решение. Докажем, что среди чисел от 0 до $N - 1$, где $N = 10^{500}$, найдется искомое число. Если любое число из этого диапазона усложнить 100 раз, получится число, меньшее $10^{600} = (10^{300})^2$. Существует ровно 10^{300} полных квадратов, меньших 10^{600}. Зафиксируем k – один из этих квадратов. Количество чисел, из которых его можно получить описанной в условии операцией, не превосходит количества способов зачеркнуть в нем 100 цифр. Это количество строго меньше количества способов выбрать из его цифр произвольный набор. Последнее же количество равно $2^{(\text{количество цифр в k})} \leq 2^{600}$. Таким образом, общее количество чисел от 1 до $N - 1$, из которых может быть получен полный квадрат, не превосходит $10^{300} \cdot 2^{600} = 10^{300} \cdot 8^{200} < 10^{500} = N$. Отсюда следует, что на промежутке от 0 до $N-1$ найдется число, из которого 100-кратным усложнением нельзя получить полный квадрат, что и требовалось

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 0 баллов. Приблизительно получена оценка, в каких пределах может быть построено искомое число, – 3 балла. Получено продвижение в конструктивном построении решения – 2-3 балла.